



TITLE:

Shiftsの周辺の話題について(超有限II\$\_1\$型因子上のシフトの外部共役問題)

AUTHOR(S):

榎本, 雅俊

---

CITATION:

榎本, 雅俊. Shiftsの周辺の話題について(超有限II\$\_1\$型因子上のシフトの外部共役問題). 数理解析研究所講究録 1996, 948: 11-38

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60280>

RIGHT:

## Shifts の周辺の話題について

甲子園大経常情報 榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)

V. Jones の仕事以来, 作用環の指数理論は多くの異なる方向で発展している. このノートでは, Powers [43] により始められた  $*$ -endomorphisms の分類問題についての話題を, 筆者の関心した観点から述べる. また, それらに関連した話題についても触れることにする.

### [I] Powers の binary shifts について

ここでは後で必要となる言葉と概念を述べ, Powers の仕事を概説し, 我々の結果との関連を述べる.

定義 1  $\mathcal{O}$  を単位元をもつ  $C^*$ -algebra とする.  $\text{End}(\mathcal{O})$  で,  $\mathcal{O}$  上の  $*$ -endomorphisms 全体を表すとする.  $\alpha, \beta \in \text{End}(\mathcal{O})$  として,  $\alpha$  と  $\beta$  が conjugate であるというのを, ある  $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{O})$  で  $\beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$  となるものが存在することと決める.  $\alpha$  と  $\beta$  が cocycle conjugate であるというのを, ある unitary  $w \in \mathcal{O}$ , ある  $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{O})$  で  $\text{Ad } w \cdot \beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$  となるものが存在することと決める.

Powers は,  $B(H)$  上の  $*$ -endomorphisms の間の conjugacy, cocycle conjugacy の問題を, 次の shifts のクラスについて解決した.

定義 2  $\mathcal{O}$  を単位元をもつ  $C^*$ -algebra で,  $\alpha \in \text{End } \mathcal{O}$  とする.  
 $\alpha$  が shift であるとは,  $\alpha(1) = 1$  で,  $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \alpha^k(\mathcal{O}) = \mathbb{C}1$  なることを決める.

定義 3  $\alpha \in \text{End}(B(H))$ ,  $\alpha \notin \text{Aut}(B(H))$  とする.  $N_1 = \alpha(B(H))'$  としたとき,  $N_1 = \text{In-factor}$  ( $n=2, 3, \dots, \infty$ ) で,  $n$  のことを,  $\alpha$  の multiplicity と言う.

定理 4.  $\alpha, \beta$  を  $B(H)$  上の shifts とする.  $B(H)$  の pure normal state  $\omega_0$  で,  $\alpha$  のもとに不変なものが存在すると仮定する. このとき,  $\alpha$  と  $\beta$  が conjugate であることと,  $\beta$  のもとに不変な pure normal state  $\omega_1$  が存在して,  $\alpha$  と  $\beta$  は同じ multiplicity をもつことは同値である.

定理 5  $\alpha$  と  $\beta$  を  $B(H)$  上の shifts とする. このとき,  $\alpha$  と  $\beta$  が cocycle conjugate であることと,  $\alpha$  と  $\beta$  が同じ multiplicity をもつことは同値である.

つまり,  $B(H)$  上の shifts 達は, multiplicity により殆んど決定されてしまうのである. その後, Powers は Hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R$  上の shifts の分類を問題とした. まず,  $R$  上の shifts の最も簡単なクラスとして, 次の binary shifts を考えた.

定義 6  $\alpha$  を  $R$  上の shift とする.  $\alpha$  が binary shift

であるとは、次を満たす unitary  $u \in R$  が存在する ことである。

$$\textcircled{1} u^2 = 1 \quad \textcircled{2} u\alpha^k(u) = \pm \alpha^k(u)u \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} R = \{u, \alpha(u), \alpha^2(u), \dots\}''.$$

(注意として、このとき、Jones index  $[R:\alpha(R)] = 2$  である。)

この binary shifts の conjugacy class について、Powers は  
次を導いた。

定義 7  $\alpha \in R$  の binary shifts とし、 $\alpha$  の交換集合  $S(\alpha)$  を、

$$S(\alpha) \equiv \{k > 0 : u\alpha^k(u) = -\alpha^k(u)u\}$$

で定義する。

このとき、

定理 8  $\alpha$  と  $\beta \in R$  上の binary shifts とあり、 $\alpha$  と  $\beta$  が  
conjugate である こと、 $S(\alpha) = S(\beta)$  とは 同値である。

これをを用いて、

定理 9  $R$  の binary shifts は conjugacy を除いて uncountably  
infinite 存在する。また、 $R$  の binary shifts の cocycle conjugacy  
classes は 少なくとも countably infinite は存在する。

Powers は、[43] で次の問題を与えた。

問題 10  $\alpha$  と  $\beta$  を binary shifts とあり、

$$g(\alpha) = \min \{k \mid \alpha^k(R) \cap R \neq \mathbb{C}1\}$$

とおく。このとき、 $g(\alpha)$  は、 $\alpha$  の cocycle conjugacy invariant である。もし  $g(\alpha) = g(\beta)$

ならば,  $\alpha$  と  $\beta$  は cocycle conjugate であるか?

この問題は, [23] の中で, 次のように解決された.

定義 11  $G = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  とする.  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  が signature sequence

とは,  $a(0) = 0$ ,  $a(n) = a(-n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) なる  $\alpha$  と  $\beta$  をいう.  $G$  上の shift  $\sigma$  は,  $(\sigma(x))(i) = x(i-1)$  ( $i \geq 1$ ),  $(\sigma(x))(0) = 0$  ( $x = (x(i)) \in G$ )

とする.  $a$  に対応する multiplier  $m_a \in \mathbb{Z}^2(G, \mathbb{T})$  は,

$$m_a(x, y) = (-1)^{\sum_{i > j} a(i-j) x(i) y(j)} \quad (x = (x(i)), y = (y(j)) \in G)$$

で決まる.

$\ell^2(G)$  上の unitary operator  $\lambda_{m_a}(x)$  は,

$$(\lambda_{m_a}(x)\xi)(y) = m_a(x, x^{-1}y) \xi(x^{-1}y) \quad (x, y \in G, \xi \in \ell^2(G))$$

と定義する.  $R_{m_a}(G)$  は,  $\{\lambda_{m_a}(x) \mid x \in G\}$  により生成された von Neumann algebra である. signature sequence  $a$  が periodic とは, ある整数  $k$  を,  $a(k+n) = a(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) が成立する  $\alpha$  と  $\beta$  をいう.  $a$  が eventually periodic とは, ある整数  $k (\geq 0)$ ,  $p (> 0)$  を,  $\forall n \geq k$  により,  $a(n+p) = a(n)$  となる  $\alpha$  と  $\beta$  をいう.

$m_a(\sigma(x), \sigma(y)) = m_a(x, y)$  なる  $\sigma$  は,  $R_{m_a}(G)$  上の shift であり,  $\sigma(\lambda_{m_a}(x)) = \lambda_{m_a}(\sigma(x))$  ( $x \in G$ ) なる  $\sigma$  を induce する.  $e_0 = (1, 0, 0, 0, \dots) \in G$  を,  $e_n = \sigma^n(e_0) \in G$  を,  $u_0 = \lambda_{m_a}(e_0)$  とおくと,  $u_n = \sigma^n(u_0)$  である. このとき,  $u_n u_m = (-1)^{a(n-m)} u_m u_n$  を, Hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R = R_{m_a}(G)$  は,  $\{u_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  により生成される. この  $R_{m_a}(G)$  上の shift  $\sigma = \sigma_a$  は, signature

sequence  $a$  を持つ Powers の binary shift  $\sigma$  がある。

定理 12  $a$  を aperiodic signature sequence  $\sigma$ , finite support を持つとある。つまり,  $\#\{i \in \mathbb{N}; a(i) \neq 0\} < +\infty$  を仮定する。

$d = \max\{i \in \mathbb{N}; a(i) \neq 0\}$  とある。このとき,  $\sigma^k(R)' \cap R = \mathbb{C}1$  ( $0 \leq k \leq d$ ),  $\sigma^k(R)' \cap R = \{u_i; 0 \leq i \leq k-d-1\}''$  ( $d+1 \leq k$ ) となるを使うと, Powers の問題には, 次の定理が取れる。

定理 13  $a, b$  を次の signature sequence とする,  $a(1)=a(3)=1$ ,  $a(i)=0$  ( $i \neq 1, 3$ ),  $b(1)=b(2)=b(3)=1$ ,  $b(j)=0$  ( $j \neq 1, 2, 3$ )。このとき,  $\sigma_a^n(R)' \cap R \cong M_2 \otimes \mathbb{C}^q$ ,  $\sigma_b^n(R)' \cap R \cong M_4$ 。このように, 二つは同型ではない。よって,  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  は cycle conjugate ではない。

この問題を考えようとするときに, [22] の中で,  $a, b$  を finite support を持つ signature sequence とし, それらに対応する binary shifts を  $\sigma_a, \sigma_b$  とすると,  $\sigma_a$  が  $\sigma_b$  に conjugate であるとき,  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  が cycle conjugate が同値であるという予想を出したが, これは [9] の中で肯定的に解決された。

[9] では,  $a$  を eventually periodic な signature sequence とすると,  $\exists r$  で,  $\sigma_a^r(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$  なる  $\sigma$ , 次の derived shift  $(\sigma_a)_\infty$  を考えることができる, つまり,

$$(\sigma_a)_\infty \equiv \sigma_a \Big| \bigcup_{r \geq 0} \sigma_a^r R.$$

と  $a$  と  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  が cycle conjugate  $a$  と  $\sigma_a$  と  $(\sigma_a)_\infty$  と  $(\sigma_b)_\infty$  は conjugate が 示せるので, このようにして我々の予想が示された.

又, binary shifts の cycle conjugacy を考える中で, [21] の結果を得た. finite support をもつ binary shifts に対する relative commutant algebras の構造を決定して, 殆どどの binary shifts が cycle conjugacy を除いて, relative commutant algebras で分類される. また, [9] の結果と合わせると, ある 2 つの異なる signature sequences  $a_1, a_2$  で,  $a_1$  と  $a_2$  から得られる binary shifts の relative commutant algebras の Bratteli diagrams が同じになるものの存在が示せる.

また, Stacey [62] は, [21] の議論を使って, 一般の  $p$ -shift ( $p$  は素数) に対し, 我々の結果を拡張している.

また, Powers の binary shift ではない index 2 の shift の存在は, Price [52] により, binary shifts を AF 群に積み重ねることによって得られた. ただし, [52] では, binary shift ではない index 2 の shift の例を 1 つ作ったに留まった. その後, 我々 [20] に於て, [52] の例を更に一般化して, binary shift ではない index 2 の shifts を, uncountably many な non-conjugate shifts を構成した. この構成は, 次のようになされる.

$X = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  とし, signature sequence  $a$  に対応する  $X$  上の multiplier  $\varepsilon$   $m_a$  と書く. 同様に  $Y = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  とおく. monic 多項式  $p(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k \in F_2[t]$  ( $= \mathbb{Z}'$ ,  $c_0=1$ ) とおき,

$F_2[t]/p(t) = \{f(t)/p(t) : f(t) \in F_2[t]\}$  とし, 埋め込み  $\psi: F_2[t] \rightarrow F_2[t]/p(t)$   $\varepsilon$ ,  $\psi(f(t)) = \frac{p(t)f(t)}{p(t)}$  とおき,  $\theta: X \rightarrow F_2[t]$   $\varepsilon$ ,  $x = (x(i)) \in X$

に対し,  $\theta(x) = \sum_{i \geq 0} x(i) t^i \in F_2[t]$  とおく.

また,  $\gamma: Y \rightarrow F_2[t]/p(t)$   $\varepsilon$ ,  $y = (y(i)) \in Y$  に対し,

$$\gamma(y) = \left( \sum_{i \geq 0} y(i) t^i \right) / p(t)$$

とおく.  $\Phi_p: X \rightarrow Y$   $\varepsilon$ ,  $\Phi_p = \gamma^{-1} \psi \theta$  とおく. signature sequence

$a$  と monic 多項式  $p_\ell(t) = c_{\ell,0} + \dots + c_{\ell,k(\ell)} t^{k(\ell)}$  ( $= \mathbb{Z}'$ ,  $c_{\ell,0}=1$ ),

$X_\ell = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  ( $\ell=1,2,\dots$ ) とし,

$$\Phi_{p_\ell}: X_\ell \rightarrow X_{\ell+1}$$

$\varepsilon$  作る. nonperiodic signature sequences  $a_\ell$  ( $\ell=1,2,\dots$ )  $\varepsilon$ ,

nonperiodic signature sequence  $a_1 = a$  から出さず,

$$m_{a_{\ell+1}}(\Phi_{p_\ell}(x), \Phi_{p_\ell}(y)) = m_{a_\ell}(x, y) \quad (x, y \in X_\ell)$$

と作る = とか出さずの  $\mathbb{Z}'$ ,

nonzero constant terms  $\varepsilon$  かつ monic polynomials  $p_\ell$  の  $\exists$   $p =$

$(p_1, p_2, \dots)$  と nonperiodic signature sequence  $a$  に対し,

$$X_{[p]} = \varinjlim (X_\ell, \Phi_{p_\ell}), \quad m_{[a,p]}(x, y) = m_{a_\ell}(x, y) \quad (x, y \in X_\ell)$$



とおく = とで, Hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R_{m[a,p]}(X_{[p]})$  が作れ, そ  
 の上に canonical shift  $\sigma_{[p]}$  が持ちあがる. このとき, 埋め込  
 んだ多項式の選び方により, uncountably many な non-conjugate,  
 non-binary shifts で, index 2 のものを得る. 我々と異なるやり  
 方で, [10] で同様の結果が得られている. そこで, [52]  
 の non-binary shift の例を用いて, abstract なものの group  
 shift の方は固定して, 様々な multiplier を動かすことによ  
 り, uncountably many な nonconjugate, non-binary shifts で,  
 index 2 のものを得ている.

[21] の中で得られた結果の一般化が, [50] でなされている.  
 [21] では, signature sequence に finite support をもつという条  
 件を課していたのを, eventually periodic という条件にゆる  
 めても, 我々のと同じ結果が成り立つことを示している.

Nagisa [36] では, Hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R$  上の, 任意の binary  
 shift  $\alpha$  に対して,  $\alpha$  と cocycle conjugate となる binary  
 shifts で, その signature sequence がお互いに異なる無限に  
 多くのものが存在することを示されている. 最近, Price  
 [58] により, binary shifts で, commutant index = 2 をもつもの  
 の cocycle conjugacy class は唯一つであることが示されてい  
 る. 二 = で, commutant index  $K$  とは,  $\sigma^K(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$  となる  
 最初の  $K$  のことである. 以上, index 2 の shifts を扱って来

たが、一般の index  $n$  の shifts について、index 2 に対応する結果が得られる。 ([8, 9, 10, 12, 19, 53, 62])

## [II] Endomorphisms と Cuntz algebras

Amason [1] の結果: 「 $\alpha$  は nonzero な normal  $*$ -endomorphism of  $B(H)$  としたとき,  $\exists$  isometries の列  $v_1, v_2, \dots \in B(H)$  で, mutually orthogonal ranges をもつもの」で,

$$\alpha(a) = \sum_n v_n a v_n^* \quad (a \in B(H))$$

となるものの存在を示した。から, Lacan [33] は, この  $*$ -endomorphism と,  $v_1, v_2, \dots$  から生成される Cuntz algebra の表現を対応させるという idea により,  $B(H)$  の  $*$ -endomorphism についてこの結果を得ている。その内容の拡大 version が, Bratteli, Jorgensen, Price 達により, [6, 7] で調べられている。[27] の中で, 我々は Lacan の結果の  $\text{II}_1$ -version を示した。結果としては,

定理  $M$  は  $\text{II}_1$  factor,  $\alpha$  は  $M$  の unital  $*$ -endomorphism とする。  $[M = \alpha(M)] < \infty$  と仮定する。このとき, ある自然数  $n$ ,  $M$  のある Hilbert 空間上への  $*$ -表現  $\rho$  と, Cuntz algebra  $\mathcal{O}_n = C^*(\{v_i : i=1, \dots, n\})$  の  $B(H)$  への  $*$ -表現で,

$$n \leq 4([M = \alpha(M)]) \text{ の整数部分} + 1 \text{ と,}$$

$$\rho(\alpha(m)) = \sum_{i=1}^n \pi(v_i) \rho(m) \pi(v_i)^*, \quad m \in M$$

を満たすものが存在する。

定理  $\text{II}_1$  factor  $M$  が Hilbert space  $H$  に standardly 1-作用  
 しているとする。  $\mathcal{O}_m = C^*(\{s_i : i=1, \dots, m\})$ ,  $\mathcal{O}_n = C^*(\{t_j : j=1, \dots, n\})$   $\in$ ,  $H$  上の isometries  $\{s_i\}_i, \{t_j\}_j$  により生成された  
 Cuntz algebras とする。  $\alpha, \beta \in$ ,  $\alpha(x) = \sum_{i=1}^m s_i x s_i^*$ ,  $\beta(x) = \sum_{j=1}^n t_j x t_j^*$   
 ( $x \in M$ ) とする unital  $*$ -endomorphisms とする。

このとき、次は同値である：

(1)  $\alpha$  と  $\beta$  は cocycle conjugate

(2)  $m=n$  であり、ある unitary  $w \in B(L^2(M, \tau))$ , ある unitary  $v \in M$

とある unitary 行列  $(u_{ij}) \in M' \otimes M_n(\mathbb{C})$  であり、

$$\sum_{j=1}^n v(w s_j w^*) u_{ji}$$

を満たすものが存在する。

### [III] その他の shifts の関連する話題

Powers [43] に於て、 $B(H)$  上の  $*$ -endomorphisms の  $E_0$ -  
 semigroups の理論が始められた。その後、Anneron [1]

により、product system の下の下、Powers の  $E_0$ -semigroup の理  
 論が再構築されている。hyperfinite  $\text{II}_1$  factor  $R$  の  $E_0$ -semigroups  
 についても、[43] で考察されている。([3, 44, 45, 46, 47, 48,  
 51])。shifts をつなぐ場合の  $*$ -endomorphisms の考察が、  
 [54] にある。

#### [IV] 未発表の結果

以下では, 綿谷氏と筆者の間で得られた結果で, 結果だけアタウンスしたものの紹介をする. これは,  $R$  上の shifts の cocycle conjugacy を考へるとまに出たものである. (cf. [42])

主題 4.1  $P$  は, Hilbert space 上の  $\text{II}_1$  factor である.  $\sigma \in P$  の unital  $*$ -endomorphism である.

$$N(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix} : x \in P \right\} \subset P \otimes M_2(\mathbb{C})$$

とおく. このとき,  $N(\sigma)$  は factor である.

最初に, 次の事実.

補題 4.2  $\sigma \in P$  の unital  $*$ -endomorphism で,  $\sigma(P) \neq P$  である. もし  $ax = \sigma(x)a$  ( $\forall x \in P$ ) であるとき,  $a=0$  が成立する.

証明  $ax = \sigma(x)a$  なる  $a$  で,  $xa^* = a^*\sigma(x)$  である. よって,

$$a^*ax = a^*\sigma(x)a = xa^*a \quad (\forall x \in P).$$

$P$  は factor なるので,  $a^*a \in \mathbb{C}1$ . もし  $a \neq 0$  であると,  $a^*a = \lambda 1 > 0$

とおくとき,  $u = \lambda^{-1/2}a$ . このとき,

$$u^*u = (\lambda^{-1/2}a^*)(\lambda^{-1/2}a) = \lambda^{-1}a^*a = 1.$$

$P$  は finite なるので,  $uu^* = 1$ . このように,  $u$  は unitary  $\in P$  である. 他方,  $x \in P$  について,

$$x = \lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}a^*ax = (\lambda^{-1/2}a)^*\sigma(x)(\lambda^{-1/2}a) = u^*\sigma(x)u$$

このように,  $\sigma(x) = u x u^* = (\text{Ad } u)(x)$ . よって,  $\sigma(P) = P$ . これは,

矛盾なので、主張を得る。

主題 4.3  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  を  $\text{II}_1$  factor  $P$  上の unital  $*$ -endomorphisms で、 $\sigma_i(P) \neq P$  なるものとする。  $\sigma_i(P)' \cap P = \mathbb{C}1$  から  $[P : \sigma_i(P)] < \infty$  を仮定する。このとき、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  が cocycle conjugate であることと、 $N(\sigma_1)$  と  $N(\sigma_2)$  が conjugate であることは同値である。

証明  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  が cocycle conjugate とする。このとき、ある unitary  $w \in P$  と  $\theta \in \text{Aut } P$  で、 $\sigma_2 = \text{Ad } w \circ \theta \sigma_1 \theta^{-1}$  とするものが存在する。

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x_1) & \theta(x_2) \\ \theta(x_3) & \theta(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}^*$$

と置く。このとき、 $\Phi \in \text{Aut}(M)$ 、もし  $y = \theta(x)$  とおくと、

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix}.$$

このように、 $\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2)$ 。逆に、ある automorphism  $\Phi \in \text{Aut}(M)$  で、 $\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2)$  なるものが存在すると仮定する。

よって、 $x \in P$  について、

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix}$$

がある  $y \in P$  に対して成立する。このとき、automorphism  $\theta \in \text{Aut}(P)$  を、 $\theta(x) = y, x \in P$  と定義する。次に、

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix} \text{ を考える。このとき、} w \text{ が } P \text{ の}$$

unitary である  $\Leftrightarrow$   $\exists$   $u, v$  である. 最初に,  $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  である. 明らかに,

$$\Phi(N(\sigma_1)' \cap M) = N(\sigma_2)' \cap M$$

である. 次に,

$$N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \text{ である.}$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in N(\sigma_2)' \cap M \text{ ならば,}$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって, } \forall y \in P \text{ ならば,}$$

$$sy = ys, v\sigma_2(y) = \sigma_2(y)v, t\sigma_2(y) = yt, vy = \sigma_2(y)u.$$

$P$  は factor である  $\Leftrightarrow$   $\exists$   $\xi$ ,  $\sigma_2(P)' \cap P = \mathbb{C}I$  と lemma 1 から,

$$s, v \in \mathbb{C}I, t = u = 0$$

から,

$$N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N(\sigma_1)' \cap M \text{ である,}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\}.$$

よって,

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ かつ, } \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

しかし,  $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  は起らない. これは, 次の理由

による.

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)M\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)N(\sigma_1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right] = [P \oplus 0 : P \oplus 0] = 1$$

が成立するが, 他方,

$$\left[\Phi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)M\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \Phi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)N(\sigma_1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\right] = [0 \oplus P : 0 \oplus \sigma_2(P)]$$

$$\geq 2 \quad (\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2) \text{ を使って 2 になる.})$$

と矛盾が, index は isomorphism invariant なのだから, これは矛盾.

よって, 
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

更に, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix}.$$
 が成立する.

これは, 
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 から導かれる.

よって, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + w^*w & a^*b + w^*c \\ b^*a + c^*w & b^*b + c^*c \end{pmatrix}.$$
 これは,  $b = c = 0$ .

他方, 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} aa^* & aw^* \\ wa^* & ww^* \end{pmatrix}.$$

よって,

$a = 0$  かつ,  $w$  は  $P$  の unitary となる. 更に,

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\sigma_1(x)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \theta(\sigma_1(x)) w^* \end{pmatrix}.$$

よって,  $\sigma_2(\theta(x)) = w \theta(\sigma_1(x)) w^*$ . したがって,  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は *cocycle conjugate*.

$N(\sigma)$  の  $M$  の  $\phi$  の index は, local index を使って計算できる.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(\sigma) \cap M \text{ かつ, } p_1 \text{ と } p_2 \text{ は } N(\sigma) \cap M$$

の partition である. よって,

$$[M : N(\sigma)] = \frac{[M : N(\sigma)]_{p_1}}{\tau_M(p_1)} + \frac{[M : N(\sigma)]_{p_2}}{\tau_M(p_2)}$$

$$= \text{よって}, \tau_M(p_1) = \tau_M(p_2) = \frac{1}{2}.$$

$$[M : N(\sigma)]_{p_1} = [M_{p_1} : N(\sigma)_{p_1}] = [p = p] = 1.$$

$$[M : N(\sigma)]_{p_2} = [M_{p_2} : N(\sigma)_{p_2}] = [p = \sigma(p)].$$

したがって,

$$[M : N(\sigma)] = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{[p = \sigma(p)]}{\frac{1}{2}} = 2(1 + [p = \sigma(p)]).$$



より, もし  $\sigma$  が binary shift ならば,  $\sigma$  の index は 6 である。  
 次に,  $N(\sigma)$  は  $M$  の infinite depth をもつことを示す。Popa  
 の結果から, もし  $N \subsetneq M$  が finite depth をもたなければ,  
 $E_{N \cap M}(e_0) = [M:N]^{-1}I$  が成立する。ここで,  $N \subset M$  が  
 finite depth をもつとは,  $\sup \dim \mathbb{Z}(M' \cap M_{i+1}) < \infty$  のことである。  
 Pimener-Popa により,  $N \subset M$  は finite factors であり,  
 $[M:N] < \infty$  としたとき, 次の (1) と (2) の同値が成り立つ。  
 3.

$$(1) H(M|N) = \log [M:N]$$

$$(2) E_{N \cap M}(e_0) = [M:N]^{-1}I_M.$$

次に考えよう。

$$N(\sigma) \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\} = \mathbb{C}p_1 \oplus \mathbb{C}p_2.$$

$p_1$  と  $p_2$  は,  $N(\sigma) \cap M$  の minimal projection である。従って, Pimener-Popa の公式より,

$$\begin{aligned} H(M|N(\sigma)) &= \tau(p_1) \log \left( \frac{[M_{p_1} : N(\sigma)_{p_1}]}{\tau(p_1)^2} \right) + \tau(p_2) \log \left( \frac{[M_{p_2} : N(\sigma)_{p_2}]}{\tau(p_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{\frac{1}{4}} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{[p : \sigma(p)]}{\frac{1}{4}} \right) = \log 4 [p : \sigma(p)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

よって,

$$H(M|N(\sigma)) \neq \log [M:N(\sigma)].$$

何故なら, もし一致したとすると,  $16 [p : \sigma(p)] = 4(1 + [p : \sigma(p)])^2$ 。  
 これは,  $[p : \sigma(p)] = 1$  を得る。これは,  $\sigma(p) \neq p$  に矛盾する。

これに関連し 2, index 6 の subfactor の 1 つの部分 は 次で特徴づけられる。

主題 4.4  $N \subset M$  は  $\text{II}_1$  factor とし,  $[M:N]=6$  とする.  $\tau$  は faithful normal trace on  $M$  とする. 次を仮定する.

$$N' \cap M = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_{(1-p)}, \quad p \in M^p.$$

＝ a とし, (1)  $\tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}$  とすると, ある onto  $*$ -endomorphism

$$\sigma: M_p \rightarrow M_{1-p} \text{ が存在し, } N = \{x \oplus \sigma(x) \mid x \in M_p\} \subset M$$

となる. (2)  $\tau(p) = \frac{1}{3}$  か  $\frac{1}{2}$  とすると,  $\exists *$ -isomorphism  $\sigma:$

$$M_p \rightarrow N_{1-p} = \sigma(M_p) \subset M_{1-p} \text{ で, } [M_p : N_{1-p}] = 2 \text{ かつ}$$

$$N = \{x \oplus \sigma(x) : x \in M_p\} \subset M \text{ を満たすものが存在する.}$$

(3)  $\tau(p) = \frac{1}{2}$  か  $\tau(p) = \frac{2}{3}$  ならば, ある  $*$ -isomorphism  $\sigma$  で,

$$\sigma: M_{1-p} \rightarrow N_p \subset M_p, [M_p : \sigma(M_{1-p})] = 2 \text{ で, } N = \{\sigma(x) \oplus x : x \in M_{1-p}\} \subset M$$

となるものが存在する.

証明  $p \in N' \cap M \neq 1$ ,  $N_p \simeq N \simeq N_{1-p}$  である.

$$x p \xrightarrow{\theta_1} x \xrightarrow{\theta_2} x(1-p).$$

＝ b かつ,  $\theta: N_p \rightarrow N_{1-p}$  は,  $\theta(xp) = x(1-p)$  で定義する.

$$＝ a \text{ とし, } [M:N] = \frac{[M_p:N_p]}{\tau(p)} + \frac{[M_{1-p}:N_{1-p}]}{\tau(1-p)}.$$

$$(A) \frac{1}{\tau(p)} + \frac{1}{\tau(1-p)} = 6 \text{ かつ } 1 \neq \text{ は, } \tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}.$$

$$(B) \frac{1}{\tau(p)} + \frac{2}{\tau(1-p)} = 6 \text{ かつ } 1 \neq \text{ は, } \tau(p) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$$

$$(c) \frac{2}{\tau(p)} + \frac{1}{\tau(1-p)} = 6 \text{ のとき } \tau(p) = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$$

(D)  $\neq 1$

$$\frac{m}{\tau(p)} + \frac{n}{\tau(1-p)} = 6, m \geq 2, n \geq 2 \text{ のとき } \tau(p) = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$$

$$\frac{m-2}{\tau(p)} + \frac{2}{\tau(p)} + \frac{n-2}{1-\tau(p)} + \frac{2}{1-\tau(p)} \geq 8$$

となり不可能である。

次に,  $M_\infty$  の algebra に関する話題について述べる.  $N$  を  $\text{II}_1$ -factor  $M$  の subfactor であり index が有限なものとする. このとき, conditional expectation  $E_N: M \rightarrow N$  を使って,  $\text{II}_1$ -factor  $M_1$  を構成できる. これを繰り返して,  $\text{II}_1$ -factor  $M_\infty = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$  をもつ. この algebra  $M_\infty$  の性質については, Masahood [34] は,  $M_\infty$  が property T を持たないことを示した. しかし, さらに強く,  $M_\infty$  は strongly stable であることが示せる.

主題 4.5  $\text{II}_1$ -factor  $M_\infty$  は, strongly stable である. 即ち,  $M_\infty \sim M_\infty \otimes R_0$  ( $=$  2,  $R_0$  は hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor) が成立する.

証明 McDuff の結果を使うことにより,  $M_\infty$  の hypercentral sequences の集合が,  $M_\infty$  の central sequences の集合と一致しないことが示されれば,  $M_\infty \sim M_\infty \otimes R_0$  が示せる. その為, Jones projections  $e_N = e_1, e_M = e_2, \dots (e \in M_\infty)$  を考える. Jones projections  $\{e_n\}$  の性質により,  $n \geq 2$  により,  $e_n x = x e_n$

( $\forall x \in M$ ). 更に,  $\forall \text{mod } e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} (\{e_n\}_n)$  に対し,  
 $n$  を十分大きく選べば,  $e_n(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}) = (e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}) e_n$ .  
 = のように,  $\{e_n\}_n$  は,  $M_\infty$  の central sequence である. 次に,  
 $(e_n)_n$  が hypercentral seq であることは  $\parallel = \perp$  である.  $x_n = e_{n+1}$  ( $n \geq 1$ )  
 とおく. = のとき,  $(x_n)_n$  は又,  $M_\infty$  の central sequence である.  
 次に計算する.

$$\begin{aligned} \|[e_{n+1}, e_n]\|_2^2 &= \|e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1}\|_2^2 = \tau((e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})^*(e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})) \\ &= \tau(e_n e_{n+1} e_n - e_n e_{n+1} e_n e_{n+1} - e_{n+1} e_n e_{n+1} e_n + e_{n+1} e_n e_{n+1}) \\ &= \tau(\lambda e_n - \lambda e_n e_{n+1} - \lambda e_{n+1} e_n + \lambda e_{n+1}), \quad = \tau, \quad \lambda = \frac{1}{[M=N]}, \\ &= 2\lambda^2(1-\lambda) > 0. \end{aligned}$$

よって,  $\|[e_{n+1}, e_n]\|_2 \not\rightarrow 0$ . = のように,  $(e_n)_n$  は hypercentral sequence ではない. よって主張を得る.

命題 4.6  $M_\infty$  は, property T をもたない.

次に, ~~有~~有限 index をもつ  $\text{II}_1$  factor の組について述べる.  
 有限 index をもつ 2 つの  $\text{II}_1$  factor の組  $N \subset M, \tilde{N} \subset \tilde{M}$  を考える.  
 = のとき,  $N \subset M$  と  $\tilde{N} \subset \tilde{M}$  の間の conjugacy と,  $N \subset M_\infty$   
 と  $\tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty, (M \subset M_\infty \text{ と } \tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty)$  の間の conjugacy を見比べると.  
 $N \subset M, \tilde{N} \subset \tilde{M}$  が conjugate であることは考えられる.  $N \subset M$  について,  
 $\tilde{N} = N, \tilde{M} = M$  とおく. = のとき,  $N \subset M$  と  $\tilde{N} \subset \tilde{M}$  は conjugate である.  
 しかし,  $N \subset M_\infty, \tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty$  は conjugate である

ある.  $n \neq m$  ならば,  $\text{index } 4\cos^2 \frac{\pi}{n}$  の組  $N \subset M$ ,  $\text{index } 4\cos^2 \frac{\pi}{m}$  の組  $\tilde{N} \subset \tilde{M}$  を取る. Ocneanu の central sequence thm により,  $M \subset M_\infty$  と,  $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty$  は conjugate であり, 何故なら,

$$[M_\infty = M \otimes (M' \cap M_\infty)] = n \left\{ 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right\}^{-1}.$$

次に, 無限 index をもつ  $\text{II}_1$  factor の組  $N \subset M$  を取る.  $\text{II}_1$ -factors の列  $(M_n)_{n \geq 0}$  を考える. この列が  $N \subset M$  に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする.

- (1)  $M_0 = N \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$ , (2)  $\overline{\bigcup_n M_n} = M$  (3)  $[M_n : N] < +\infty$  ( $\forall n \geq 0$ ).

更に,  $N \subset M$  に対する filtration が次の (4) を満たすとき, それらを  $N \subset M$  に対する proper filtration と呼ぶことにする.

- (4)  $M_n \not\subset M_{n+1}$  ( $\forall n \geq 0$ ) で, もし  $L_n$  が  $\text{II}_1$  factor で,  $M_n \leq L_n \leq M_{n+1}$  があると, そのとき,  $L_n = M_{n+1}$  か又は,  $L_n = M_n$  が, 任意の  $n \geq 0$  に対して成立する.

$\varphi(n) = [M_n : M_0]$  とおくと,  $\varphi(n) \in (M_n)_{n \geq 0}$  に対する growth function と呼ぶ. 以下では, 群の場合のみを考える. 群  $H \subset G$  に対する proper filtration  $(G_n)_{n \geq 0}$  を次のように定義する.

- $(G_n)_{n \geq 0}$  を群の列とする. それらが,  $H \subset G$  に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする,  
(1)  $G_0 = H \subset G_1 \subset \dots \subset G$ , (2)  $\langle G_n \mid n \geq 0 \rangle = G$ , (3)  $[G_n : H]$

$< +\infty$  ( $\forall i \geq 0$ ).

更に, もし  $H \subset G$  に対する filtration が次の (4) を満たすとき,  
 それを  $H \subset G$  に対する proper filtration と呼ぶことにする.

(4)  $G_n \not\subset G_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) であり, もし  $K_n$  が subgroup であり,  $G_n < K_n < G_{n+1}$  のとき,  $K_n = G_{n+1}$  かしくは,  $K_n = G_n$  ( $\forall n \geq 0$ ) が成立する.

$\varphi(n) = [G_n : G_0]$  ( $\forall n \geq 0$ ) とおく. 次の値  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \varphi(n)) / n$   
 は,  $(G_n)_{n \geq 0}$  に対する growth rate と呼ぶ.

restricted direct product group  $G = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  を取る. ( $= \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ )  
 であるとき, subgroup  $\{e\} \subset G$  を考える.  $G$  は  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  上の  
 vector space と考えられ,  $G$  の vector-subspaces はその bases として  
 記述されるので, もし  $\{e\} \subset G$  が proper filtration  $(H_i)_{i \geq 0}$   
 をもつならば, そのとき,  $H_i$  は proper であり,  $\dim H_{i+1} = \dim H_i$   
 $+ 1$  をもつ. 同様に, growth function  $\varphi(n) = [H_n : H_0]$   
 $= 2^n$  となるので, growth rate  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \varphi(n)) / n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log 2^n) / n$   
 $= \log 2$  をもつ.  $p$  を素数として,  $\mathbb{Z}_p$  の場合も同様に考える  
 ことが出来る. 次に, infinite symmetric group  $S_{\infty}$  を考える. である  
 とき,  $S_n$  から  $S_{n+1}$  への埋め込みを次のようにもつ. 埋め込み  
 $\sigma: S_n \rightarrow S_{n+1}$  を,  $(\sigma(i))(i) = i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $(\sigma)(n+1)$   
 $= (n+1)$  ( $\sigma \in S_n$ ) と決める. であるとき,  $S_n < S_{n+1}$  であり,  
 もし  $S_n < L_n < S_{n+1}$  であるとき,  $L_n = S_n$  か  $L_n = S_{n+1}$  をもつ.  
 よって,  $(S_n)_{n \geq 0}$  は,  $\{e\} \subset S_{\infty}$  に対する proper filtration である

る.  $\varphi(n) = [S_n = \{e\}] = n!$  である.

また,  $\{e\} \subset G$  にはある finite group  $(G_n)_{n \geq 0}$  の proper filtration  $(G_n)_{n \geq 0}$  があれば, proper filtration  $(R_0 \rtimes G_n)_{n \geq 0}$  を,  $R_0 \subset R_0 \rtimes G$  により 2 作る ことが出来る.  $\Rightarrow$   $R_0$  は hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor で, その action は outer である.

#### [IV] Hyperfinite $\text{II}_1$ -factor 上の Frobenius endomorphisms

Powers の shift は,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  上の canonical shift  $\varepsilon$ ,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  上の shift invariant multiplier を使って,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  の twisted group von Neumann algebra を作り, その上に, 持ち上げたものである.  $\pm 2$ ,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  は,  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} = F_2$  上の vector space として見る ことが出来て,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2 = F_2[t]$  ( $F_2$  上の多項式環) と同一視 することができる.  $\Rightarrow$  の見方からすれば, canonical shift とは, 多項式の  $t$  倍に他ならない.  $\Rightarrow$  のように, 多項式環の間の homomorphism として, 有限体の Galois 群の generator として, 有名な Frobenius map を拡張したもの を考える ことができる.

定義 5.1  $p$  を素数とする.  $\alpha$  が  $F_p[t]$  上の Frobenius map とは,  $\alpha(f(t)) = (f(t))^p$  ( $f(t) \in F_p[t]$ ) のこととする. また,  $\alpha$  が, multiplier  $m \in \mathbb{Z}^2(F_p[t], \mathbb{I})$  を伴存する とき,  $m$  による twisted von Neumann algebra  $R_m(F_p[t])$  上に,  $\alpha$  を拡張したもの を Frobenius endomorphism と呼ぶ ことにする.

$\Rightarrow$  のとき,

主題5.2  $a$  を  $\mathbb{Z}$  上の signature sequence とする.  $M_a$  を対応する multiplier とする.  $\alpha$  のとき,  $M_a$  が  $\alpha$ -invariant であること必要十分条件は,  $a(pn) = a(n)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) なることである.

例5.3  $a$  を,  $a(2^n) = 1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) をみたす signature sequence とする.  $\alpha$  のとき,  $\alpha$  は non-periodic で,  $\alpha$ -invariant である. よって,  $\alpha$  を使って, hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R_{M_a}(F_2[t])$  上に  $\alpha$  を持ち上げることができる. また, Frobenius endomorphism は, 例5.1は, 次の性質をもつ.

$$(1) [R_{M_a}(F_2[t]) = \alpha(R_{M_a}(F_2[t]))] = \infty \quad (2) \bigcap_n \alpha^n(R_{M_a}(F_2[t])) = \mathbb{C}^2.$$

注意5.4  $F_2[t, s]$  は  $F_2[t]$  上の polynomial ring で,  $s^2 + s + 1 = 0$ ,  $t$  は transcendental variable を満たすものとする.  $\alpha$  のとき,  $\sigma(f(t, s)) = tf(t, s)$  ( $f(t, s) \in F_2[t, s]$ ) とおくと,

$$[F_2[t, s] = \sigma(F_2[t, s])] = 4, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma^n(F_2[t, s]) = \{0\} \text{ かつ,}$$

$\sigma$  は shift である.  $F_2[t, s]$  上の適当な multiplier を与えることで,  $\{R_{M_a}(F_2[t, s]), \sigma\}$  と  $\{\otimes M_2(\mathbb{C}), \text{canonical shift}\}$  の間の conjugacy を持つ.

注意5.5  $\alpha$  のとき, このような Frobenius endomorphism を考える理由は, 数論との接点を見つける為である. 例5.1は, Carlitz module に出て来る  $\sigma_t + \alpha$  ( $t$  によるかけ算と, Frobenius endomor-



phism との和) も, multiplier をうまく決めればよいとて,  
 hyperfinite  $\text{II}_1$  factor 上に実現される.

### [VI] 未解決問題

(1) binary shifts には, 非可算な cocycle conjugacy classes が  
 存在するか. 特に, signature sequences が eventually periodic  
 である binary shifts はどの位の cocycle conjugacy classes をも  
 つか. 現在の所, 二つの間に cocycle conjugacy classes が 1 個  
 より多いかも知られている. しかし binary shifts の strong  
 cocycle conjugacy classes については, 1 個より多くあることが  
 示されている.

(2)  $\text{II}_1$  factor  $M$  上に, index finite な shift が存在すれば,  
 $M$  は hyperfinite であるか.

(3)  $\sigma$  が index 2 の group shift ならば, それは Price 型の  
 shift であるか.

(4) (nontrivial な form である) index 2 をもつ III 型の shift は存  
 在するか.

(5)  $a$  と  $b$  が eventually periodic signature sequence とある.  
 もし  $(\sigma_a)_\omega$  と  $(\sigma_b)_\omega$  が conjugate ならば,  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  は cocycle  
 conjugate であるか.

(6)  $a = (a_i)_{i \geq 0}$ ,  $b = (b_j)_{j \geq 0} \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$  の signature sequences  
 とする.  $\sigma_a$  と  $\sigma_b \in$ , hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor  $R$  上の対応する

binary shifts とする. signature sequence  $a$  に対し  $z$ , number  $\bar{a}$  を,  

$$\bar{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / 2^n$$
と対応させる.  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  が cycle conjugate

で,  $a$  と  $b$  が aperiodic と仮定する.  $\sigma_a$  と  $\sigma_b$  が Liouville number とあると,  $\bar{b}$  は Liouville number であるか.

(7)  $\sigma$  を, signature sequence  $0100000\cdots$  をもつ binary shift とする. もし  $\tau$  が  $\sigma$  に cycle conjugate とあると,  $\tau$  の signature sequence は,  $01111\cdots$  が periodic である.  $\sigma$  と cycle conjugate である binary shift の signature sequence は 周期の長さ  $2^n - 1$  をもち, ある長さ  $n$  の word で  $\mathbb{C}^2(R)^c$  を生成するといふことが成立するか.

(8) binary shifts が cycle conjugate ならば, その center sequences は 高々有限個のみ異なるか.

(9)  $\sigma$  の sequences が, eventually periodic な center sequences とし  $z$  起まるか.

(10)  $\alpha$  を hyperfinite II<sub>1</sub> factor  $R$  上の binary shift とする.  $I(n)$  を, algebra  $\mathcal{A}^n(R)$  が nontrivial commutant をもつ最初の index  $n$  とする. これを commutant index とする. commutant index が 3 以上の binary shifts を分類せよ.

(11) binary shift  $z$  ない  $R$  上の shift  $\alpha$  で,  $\alpha^2(R) \cap R \neq \mathbb{C}$  とするものが存在するか.

## REFERENCES

1. W.Arveson, *Continuous analogues of Fock space*, Memoirs A.M.S. 80(409) (1989).
2. V.A.Arzumanjan and Am.Versik, *Factor representations of the crossed product of a commutative  $C^*$ -algebra and a semigroup of its endomorphisms*, Soviet Math.Dokl.19(1978),48-52.
3. B.V.R.BHat, *An index theory for quantum dynamical semigroups*, Trans.Amer.Math.Soc. 348(1996),561-583.
4. D.Bisch, *Entropy of groups and subfactors*, J.Func.Anal. 103(1992), 190-208.
5. S.Boyd, N.Keswani, and I.Raeburn, *Faithful representations of crossed products by endomorphisms*, Proc.Amer.Math.Soc. 118(1993),427-436.
6. O.Bratter, P.E.T.Jorgensen, and G.L.Price, *Endomorphisms of  $B(H)$* , Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,Amer.Math.Soc.(1995).
7. O.Bratteli and P.E.T.Jorgensen, *Endomorphisms of  $B(H)$ ,II: finitely correlated states on  $O_n$* , Univ.Iowa preprint,1995.
8. D.Bures and H.S.Yin, *Shifts on the hyperfinite factor of type  $II_1$* , J.Operator Theory 20 (1988),91-106.
9. D.Bures and H.S.Yin, *Outer conjugacy of shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Pacific J.Math. 142(1990),245-257.
10. D.Bures and H.S.Yin, *A class of shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Proc.Amer.Math.Soc. 110 (1990), 169-175.
11. M.Choda, *The conjugacy classes of subfactors and the outer conjugacy classes of the automorphism group*, Math.Japon. 32(1987),379-388.
12. M.Choda, *Shifts on the hyperfinite  $II_1$ -factor*, J.Operator Theory,17(1987),223-235..
13. M.Choda, *Entropy for  $*$ -endomorphisms and relative entropy for subalgebras*, J.Operator Theory, 25(1991),125-140.
14. M.Choda, *Endomorphisms and automorphisms for factor inclusions (in Quantum and Non-Commutative Analysis,291-304 )*, Kluwer Academic Publishers.
15. A.Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup., 8(1975),383-419.
16. A.Connes and V.Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull.London Math.Soc., 17(1985),57-62.
17. J.Cuntz, *Simple  $C^*$ -algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.
18. S.Doplicher and J.E.Roberts, *Endomorphisms of  $C^*$ -algebras,cross products and duality for compact groups*, Ann.Math.130(1989),75-119.
19. M.Enomoto,M.Choda and Y.Watatani, *Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Math.Japon. 33(1988),831-843.
20. M.Enomoto,M.Choda and Y.Watatani, *Uncountably many non-binary shifts on the hyperfinite  $II_1$ -factor*.
21. M.Enomoto,M.Nagisa,Y.Watatani and H.Yoshida, *Relative commutant algebras of Powers' binary shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Math.Scand.68(1991),115-130.
22. M.Enomoto and Y.Watatani, *A solution of Powers' problem on outer conjugacy of binary shifts*, preprint (1986).
23. M.Enomoto and Y.Watatani, *Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type  $II_1$* , Proc.Amer.Math.Soc. 105(1989),371-374.
24. M.Enomoto, *Entropy of certain endomorphisms of the  $II_1$ -factor of the free group in infinite number of generators*, Bull.Koshien Univ. (1993),1-5.
25. M.Enomoto, *Frobenius endomorphisms on the hyperfinite  $II_1$ -factor*, preprint (1995).
26. M.Enomoto, *A characterization of Powers' binary shifts on the hyperfinite  $II_1$ -factor via group shifts*, Bull.Koshien Univ.16(1988),91-93.
27. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms of type  $II_1$ -factors and Cuntz algebras*, J.Austral.Math.Soc.(Series A)60(1996),1-13.
28. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms on  $II_1$ -factors and associated  $C^*$ -algebras*, in preparation.
29. F.Hiai, *Entropy and growth for derived towers of subfactors*, Preprint (Jan.1993).
30. V.Jones, *Index for subfactors*, Invent.Math. 72(1983),1-25.

31. V.Jones, *On a family of almost commuting endomorphisms*, J.Func.Anal.122(1994)84-90.
32. E.Kirchberg and G.Vaillant, *On  $C^*$ -algebras having linear, polynomial and subexponential growth*, Invent.math. 108(1992),635-652.
33. M.Laca, *Endomorphisms of  $B(H)$  and Cuntz algebras*, J.Oper.Thy. 30(1993)85-108.
34. B.Mashood, *Notes on Property T for type  $II_1$  factors*, preprint.
35. M.Nagisa, *On properties of the approximately finite dimensionality for  $C^*$ -algebras*, Thesis, 1988.
36. M.Nagisa, *Cocycle conjugacy of binary shifts on the hyperfinite factor of type  $II_1$* , preprint (1995).
37. M.Nakamura and Z.Takeda, *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc.Jap.Acad. 34(1958),489-494.
38. M.Nakamura and Z.Takada, *On inner automorphisms of finite factors*, Proc.Jap.Acad. 37(1961),31-32.
39. W.L.Paschke, *The crossed product of a  $C^*$ -algebra by an endomorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 113-118.
40. M.Pimsner and S.Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 19 (1986), 57-106.
41. C.Pinzari, *Semigroups of non-unital endomorphisms of  $C^*$ -algebras and compact group duality*, J.Funct.Anal.,115(1993),432-453.
42. S.Popa, *Soufacteurs, actions des groupes et cohomologie*, C.R.Acad.Sci.Paris, 309 (1989), 771-776.
43. R.T.Powers, *An index theory for semigroups of  $*$ -endomorphisms of  $B(H)$  and type  $II_1$  factors*, Canadian J.Math.40(1988),86-114.
44. R.T.Powers, *Continuous semi-groups of endomorphisms of  $B(H)$* , Abstracts of A.M.S. 13(1992)450(876-46-156).
45. R.T.Powers, *Continuous semigroups of endomorphism of  $B(H)$ . Preliminary report*, Abstracts of A.M.S. 15(1994)93.
46. R.T.Powers, *A non-spacial continuous semigroups of  $*$ -endomorphism of  $B(H)$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci..
47. R.T.Powers and G.Price, *Continuous spacial semigroups of  $*$ -endomorphism of  $B(H)$* , preprint.
48. R.T.Powers and D.Robinson, *An index for continuous semigroups of  $*$ -endomorphism of  $B(H)$* , J.Funct.Anal.,84(1989),85-96.
49. R.T.Powers and G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Contemporary Math. 145(1993),453-464.
50. R.T.Powers and G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, J.Func.Anal.121(1994),275-295.
51. G.Price, *The  $C^*$ -algebras generated by paires of semigroups of isometries satisfying certain commutation relations*, preprint.
52. G.Price, *Shifts on type  $II_1$  factors*, Canadian J.Math. 39 (1987), 493-511.
53. G.Price, *Shifts of integer index on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Pac.J.Math., 132 (1988), 379-390.
54. G.Price, *Endomorphisms of certain operator algebras*, Publ.RIMS 25(1989),45-57.
55. G.Price, *Shifts on certain operator algebras (in Operator Theory:Proceedings of the 1988 GPOTS-Wabash conference*, Longman Scientific and Technical, 1990.
56. G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor*, Abstracts of A.M.S. 13 (1992) 450 (876-46-27).
57. G.Price, *Shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor (Preliminary report)*, Abstracts of A.M.S. 15 (1994) 94.
58. G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite  $II_1$  factor,  $II$* , preprint (1995).
59. Y.Sekine, *An inclusion of type III factors with index 4 arising from an automorphism*, preprint.
60. J.Slawny, *On factor representations and the  $C^*$ -algebra of canonical commutation relations*, Comm.Math.Phys., 24(1972),151-170.
61. P.J.Stacy, *Product shifts on  $B(H)$* , Proc.Amer.Math.Soc.113(1991),955-963.

- 62. P.J.Stacy, *A comment of certain p-shift algebras*, J. Austral. Math. Soc. 49(1990),55-58.
- 63. P.J.Stacy, *Crossed products of  $C^*$ -algebras by  $*$ -endomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. 54(1993),204-212.
- 64. K.Watanabe, *Shifts with two generators on the hyperfinite  $II_1$ -factor*, Nihonkai J.Math.
- 65. H.Yin, *Entropy of certain noncommutative shifts*, Rocy Mtn.J.Math. 20(1990),651-656.